海淀区高三年级第二学期期中练习

数学(理)参考答案与评分标准 2018.4

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	B	A	D	D	B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	9	10	11	12		13	14	
答案	$1+\mathrm{i}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{3}$	48	$(-\sqrt{3},\sqrt{3}]$	$x>-1$

注：第 12、14 题第一空均为 3 分，第二空均为 2 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答题应写出解答步骤。

15.（本题满分 13 分）

（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}+2\cos^2\frac{\pi}{6}-1$

$$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1$$

$=2$ ……………………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

因为函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），

解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$（$k\in\mathbf{Z}$），

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$（$k\in\mathbf{Z}$）………………………… 13 分

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

16.（本题满分 13 分）

（Ⅰ）设事件 A：从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播.用 A_i 表示事件抽取的月份为第 i 月，则

$\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10},A_{11},A_{12}\}$ 共 12 个基本事件，

$A=\{A_2,A_6,A_8,A_9,A_{10},A_{11}\}$ 共 6 个基本事件，

所以，$P(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.……………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）在第一季度和第二季度的 6 个月中，甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份只有 2 月和 6 月，故 X 所有可能的取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$，$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$

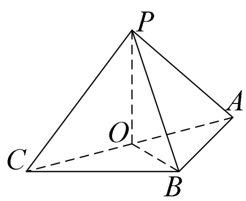
随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

（Ⅲ）M 的最大值为 58%，最小值为 54%.…………………………………………13 分

17.（本题满分 14 分）

（Ⅰ）方法 1：



设 AC 的中点为 O，连接 BO，PO．由题意

$PA=PB=PC=\sqrt{2}$，$PO=1$，$AO=BO=CO=1$

因为在 ΔPAC 中，$PA=PC$，O 为 AC 的中点

所以 $PO\perp AC$，

因为在 ΔPOB 中，$PO=1$，$OB=1$，$PB=\sqrt{2}$

所以 $PO\perp OB$

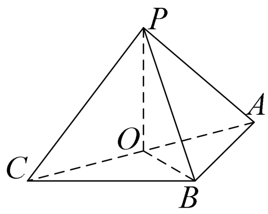
因为 $AC\cap OB=O$，$AC,OB\subset$ 平面 ABC

所以 $PO\perp$ 平面 ABC

因为 $PO\subset$ 平面 PAC ……………………………………………………………4 分

所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC

方法 2：



设 AC 的中点为 O，连接 BO， PO.

因为在 ΔPAC 中， $PA=PC$， O 为 AC 的中点

所以 $PO\perp AC$，

因为 $PA=PB=PC$， $PO=PO=PO$， $AO=BO=CO$

所以 $\Delta POA\cong\Delta POB\cong\Delta POC$

所以 $\angle POA=\angle POB=\angle POC=90°$

所以 $PO\perp OB$

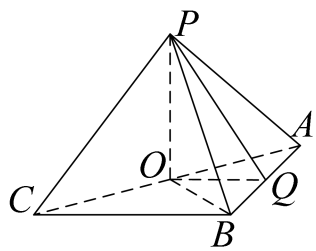
因为 $AC\cap OB=O$， $AC,OB\subset$ 平面 ABC

所以 $PO\perp$ 平面 ABC

因为 $PO\subset$ 平面 PAC ………………………………………………………………… 4 分

所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC

方法 3：



设 AC 的中点为 O，连接 PO，因为在 ΔPAC 中， $PA=PC$，

所以 $PO\perp AC$

设 AB 的中点 Q，连接 PQ， OQ 及 OB.

因为在 ΔOAB 中， $OA=OB$， Q 为 AB 的中点

所以 $OQ\perp AB$.

因为在 ΔPAB 中， $PA=PB$， Q 为 AB 的中点

所以 $PQ\perp AB$.

因为 $PQ\cap OQ=Q$， $PQ,OQ\subset$ 平面 OPQ

所以 $AB\perp$ 平面 OPQ

因为 $OP \subset$ 平面 OPQ

所以 $OP \perp AB$

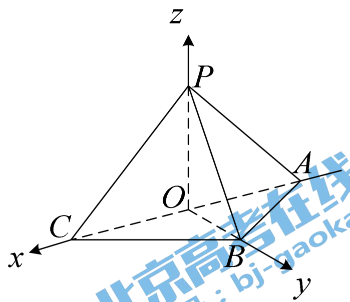
因为 $AB \cap AC = A$， $AB, AC \subset$ 平面 ABC

所以 $PO \perp$ 平面 ABC

因为 $PO \subset$ 平面 PAC ………………………………………………………… 4 分

所以平面 $PAC \perp$ 平面 ABC

（Ⅱ）由 $PO \perp$ 平面 ABC， $OB \perp AC$，如图建立空间直角坐标系，则



$O(0,0,0)$， $C(1,0,0)$， $B(0,1,0)$， $A(-1,0,0)$， $P(0,0,1)$

由 $OB \perp$ 平面 APC，故平面 APC 的法向量为 $\overrightarrow{OB} = (0,1,0)$

由 $\overrightarrow{BC} = (1,-1,0)$， $\overrightarrow{PC} = (1,0,-1)$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，则

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$ 得： $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

令 $x = 1$，得 $y = 1$， $z = 1$，即 $\vec{n} = (1,1,1)$

$\cos < \vec{n}, \overrightarrow{OB} > = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由二面角 $A - PC - B$ 是锐二面角，

所以二面角 $A - PC - B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………… 9 分

（Ⅲ）设 $\overrightarrow{BN} = \mu \overrightarrow{BP}$， $0 \le \mu \le 1$，则

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{CP} = (1,-1,0) + \lambda(-1,0,1) = (1-\lambda, -1, \lambda)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BP} = (1,1,0) + \mu(0,-1,1) = (1, 1-\mu, \mu)$

令 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$

得 $(1-\lambda) \cdot 1 + (-1) \cdot (1-\mu) + \lambda \cdot \mu = 0$

即 $\mu=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=1-\dfrac{1}{1+\lambda}$，$\mu$是关于$\lambda$的单调递增函数，

当 $\lambda\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}]$时，$\mu\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{5}]$，

所以 $\dfrac{BN}{BP}\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{5}]$ ………………………………………………………… 14 分

18.（本题满分 13 分）

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

故 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\mathbf{e}$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathbf{e})$ ……………………………………………………4 分

（Ⅱ）方法 1：$f'(x)=\dfrac{\frac{x+a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}=\dfrac{1+\frac{a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}$

令 $g(x)=1+\dfrac{a}{x}-\ln x$

则 $g'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+a}{x^2}<0$

由 $g(\mathbf{e})=\dfrac{a}{\mathbf{e}}>0$，$g(\mathbf{e}^{a+1})=1+\dfrac{a}{e^{a+1}}-(1+a)=a\cdot(\dfrac{1}{e^{a+1}}-1)<0$

故存在 $x_0\in(\mathbf{e},\mathbf{e}^{a+1})$，$g(x_0)=0$

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

故 $f(x_0)=\dfrac{1}{\mathbf{e}^2}$

故 $\begin{cases}1+\dfrac{a}{x_0}-\ln x_0=0\\ \dfrac{\ln x_0}{x_0+a}=\dfrac{1}{\mathbf{e}^2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\mathbf{e}^2\\ a=\mathbf{e}^2\end{cases}$ ………………………………………………… 13 分

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

故 a 的值为 e^2.

（Ⅱ）方法 2： $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{\mathbf{e}^2}$ 的充要条件为对任意的 $x\in(0,+\infty)$， $\frac{\ln x}{x+a}\le\frac{1}{\mathbf{e}^2}$ 且存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $\frac{\ln x_0}{x_0+a}=\frac{1}{\mathbf{e}^2}$，等价于对任意的 $x\in(0,+\infty)$， $a\ge\mathbf{e}^2\ln x-x$ 且存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $a\ge\mathbf{e}^2\ln x_0-x_0$，

等价于 $g(x)=\mathbf{e}^2\ln x-x$ 的最大值为 a.

$\because\ g'(x)=\frac{\mathbf{e}^2}{x}-1$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=\mathbf{e}^2$.

x	$(0,\mathbf{e}^2)$	$\mathbf{e}^2$	$(\mathbf{e}^2,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

故 $g(x)$ 的最大值为 $g(\mathbf{e}^2)=\mathbf{e}^2\ln\mathbf{e}^2-\mathbf{e}^2=\mathbf{e}^2$，即 $a=\mathbf{e}^2$.…………………………13 分

（19）（本小题 14 分）

（Ⅰ）由题意 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，

解得： $a=2\sqrt{2}$， $b=\sqrt{2}$， $c=\sqrt{6}$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$……………………………………………………5 分

（Ⅱ）假设直线 TP 或 TQ 的斜率不存在，则 P 点或 Q 点的坐标为(2，−1)，直线 l 的方程为 $y+1=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\frac{1}{2}x-2$.

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=\frac{1}{2}x-2\end{cases}$，得 $x^2-4x+4=0$，

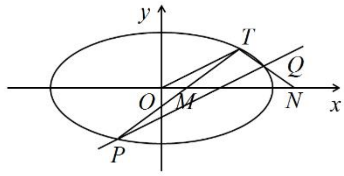
此时，直线 l 与椭圆 C 相切，不合题意.

故直线 TP 和 TQ 的斜率存在.

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

方法 1：

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则



直线 $TP: y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$，

直线 $TQ: y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)$

故 $|OM|=2-\dfrac{x_1-2}{y_1-1}$，$|ON|=2-\dfrac{x_2-2}{y_2-1}$

由直线 $OT: y=\dfrac{1}{2}x$，设直线 $PQ: y=\dfrac{1}{2}x+t$（$t\neq 0$）

联立方程，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$

当 $\Delta>0$ 时，$x_1+x_2=-2t$，$x_1\cdot x_2=2t^2-4$

$$|OM|+|ON|=4-(\frac{x_1-2}{y_1-1}+\frac{x_2-2}{y_2-1})$$

$$=4-(\frac{x_1-2}{\frac{1}{2}x_1+t-1}+\frac{x_2-2}{\frac{1}{2}x_2+t-1})$$

$$=4-\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{\frac{1}{4}x_1x_2+\frac{1}{2}(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}$$

$$=4-\frac{2t^2-4+(t-2)(-2t)-4(t-1)}{\frac{1}{4}(2t^2-4)+\frac{1}{2}(t-1)\cdot(-2t)+(t-1)^2}$$

$=4$ ………………………………………………………… 14 分

方法 2：

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 TP 和 TQ 的斜率分别为 k_1 和 k_2

由 $OT: y=\dfrac{1}{2}x$，设直线 $PQ: y=\dfrac{1}{2}x+t$（$t\neq 0$）

联立方程，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

当$\Delta>0$时，$x_1+x_2=-2t$，$x_1\cdot x_2=2t^2-4$

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x_1+t-1}{x_1-2}+\frac{\frac{1}{2}x_2+t-1}{x_2-2}$$

$$=\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2t^2-4+(t-2)(-2t)-4(t-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=0$$

故直线TP和直线TQ的斜率和为零

故$\angle TMN=\angle TNM$

故$TM=TN$

故T在线段MN的中垂线上，即MN的中点横坐标为2

故$|OM|+|ON|=4$ ………………………………………………………………… 14 分

20. （本题满分 13 分）

（Ⅰ） A是“$N-$数表 ”，其“$N-$值”为3， B不是“$N-$数表”.……………………3 分

（Ⅱ）假设$a_{i,j}$和$a_{i',j'}$均是数表A的“$N-$值”，

①若$i=i'$，则$a_{i,j}=\max\{a_{i,1},a_{i,2},\dots,a_{i,n}\}=\max\{a_{i',1},a_{i',2},\dots,a_{i',n}\}=a_{i',j'}$；

②若$j=j'$，则$a_{i,j}=\min\{a_{1,j},a_{2,j},\dots,a_{n,j}\}=\min\{a_{1,j'},a_{2,j'},\dots,a_{n,j'}\}=a_{i',j'}$；

③若$i\neq i'$，$j\neq j'$，则一方面

$$a_{i,j}=\max\{a_{i,1},a_{i,2},\dots,a_{i,n}\}>a_{i,j'}>\min\{a_{1,j'},a_{2,j'},\dots,a_{n,j'}\}=a_{i',j'},$$

另一方面

$$a_{i',j'}=\max\{a_{i',1},a_{i',2},\dots,a_{i',n}\}>a_{i',j}>\min\{a_{1,j},a_{2,j},\dots,a_{n,j}\}=a_{i,j};$$

矛盾. 即若数表A是“$N-$数表”，则其“$N-$值”是唯一的.……………………8 分

（Ⅲ）方法 1：

对任意的由1，2，3，…，361组成的19行19列的数表$A=(a_{i,j})_{19\times19}$.

定义数表$B=(b_{j,i})_{19\times19}$如下，将数表A的第i行，第j列的元素写在数表B的第j行，第i列，即

$$b_{j,i}=a_{i,j}\text{（其中}1\le i\le19,\ 1\le j\le19\text{）}$$

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

显然有：

①数表 B 是由1，2，3，…，361组成的19行19列的数表

②数表 B 的第 j 行的元素，即为数表 A 的第 j 列的元素

③数表 B 的第 i 列的元素，即为数表 A 的第 i 行的元素

④若数表 A 中，$a_{i,j}$ 是第 i 行中的最大值，也是第 j 列中的最小值

则数表 B 中，$b_{j,i}$ 是第 i 列中的最大值，也是第 j 行中的最小值.

定义数表 $C=(c_{j,i})_{19\times19}$ 如下，其与数表 B 对应位置的元素的和为362，即

$$c_{j,i}=362-b_{j,i}\text{（其中}1\le i\le19\text{，}1\le j\le19\text{）}$$

显然有

①数表 C 是由1，2，3，…，361组成的19行19列的数表

②若数表 B 中，$b_{j,i}$ 是第 i 列中的最大值，也是第 j 列中的最小值

　则数表 C 中，$c_{j,i}$ 是第 i 列中的最小值，也是第 j 列中的最大值

特别地，对由1，2，3，…，361组成的19行19列的数表 $A=(a_{i,j})_{19\times19}$

①数表 C 是由1，2，3，…，361组成的19行19列的数表

②若数表 A 中，$a_{i,j}$ 是第 i 行中的最大值，也是第 j 列中的最小值

　则数表 C 中，$c_{j,i}$ 是第 i 列中的最小值，也是第 j 列中的最大值

即对任意的 $A\in\Omega_{19}$，其"$N-$值"为 $a_{i,j}$（其中 $1\le i\le19$，$1\le j\le19$），则 $C\in\Omega_{19}$，且其"$N-$值"为 $c_{j,i}=362-b_{j,i}=362-a_{i,j}$.

记 $C=T(A)$，则 $T(C)=A$，即数表 A 与数表 $C=T(A)$ 的"$N-$值"之和为362，

故可按照上述方式对 Ω_{19} 中的数表两两配对，使得每对数表的"$N-$值"之和为362，

故 X 的数学期望 $E(X)=181$.……………………………………………………13 分

方法 2：

X 所有可能的取值为 $19,20,21,\ldots,341,342,343$.

记 Ω_{19} 中使得 $X=k$ 的数表 A 的个数记作 n_k，$k=19,20,21,\ldots,341,342,343$，则

$$n_k=19^2\times C_{k-1}^{18}\times C_{361-k}^{18}\times[(18^2)!].$$

则 $n_{362-k}=19^2\times C_{361-k}^{18}\times C_{k-1}^{18}\times[(18^2)!]=n_k$，则

$$E(X)=\frac{\sum_{k=19}^{343}n_k\cdot k}{\sum_{k=19}^{343}n_k}=\frac{\sum_{k=19}^{343}n_{362-k}\cdot k}{\sum_{k=19}^{343}n_k}=\frac{\sum_{k=19}^{343}n_k\cdot(362-k)}{\sum_{k=19}^{343}n_k},$$

故 $2E(X)=\dfrac{\sum\limits_{k=19}^{343} n_k\cdot k}{\sum\limits_{k=19}^{343} n_k}+\dfrac{\sum\limits_{k=19}^{343} n_k\cdot(362-k)}{\sum\limits_{k=19}^{343} n_k}=362$ ， $E(X)=181$. ……………… 13 分