2023北京八中初三（上）期中

数　　学

年级：初三 科目：数学 班级：__________ 姓名：__________

考生须知

1．本试卷共6页，共三道大题28道小题．满分100分，考试时间120分钟．

2．在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名和学号．

3．试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效．

4．考试结束后，试卷和答题纸一律上交．

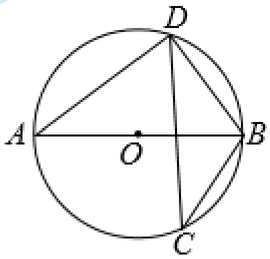
一、选择题（本题共16分，每小题2分）（每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1. 将抛物线$y=x^2$向左平移1个单位长度，再向下平移3个单位长度后，就得到抛物线（　　）

A. $y=(x+1)^2+3$　　　　B. $y=(x-1)^2-3$

C. $y=(x+1)^2-3$　　　　D. $y=(x-1)^2+3$

2. 如图，AB是$\odot O$的直径，CD是弦，若$\angle CDB=32°$，则$\angle ABC$等于（　）



A.68°　　B. 64°　　C. 58°　　D. 32°

3. 已知$\odot O$的半径是8，点P到圆心O的距离d为方程$x^2-4x-5=0$的一个根，则点P在（　　）

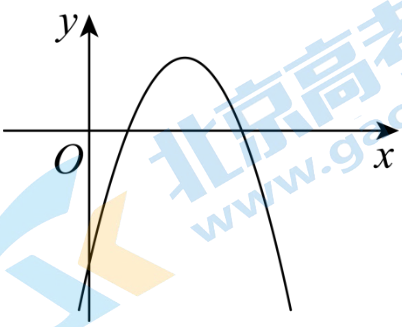
A. $\odot O$的内部　　　　B. $\odot O$的外部

C. $\odot O$上或$\odot O$的内部　　　　D. $\odot O$上或$\odot O$的外部

4. 用配方法解一元二次方程x^2-4x-7=0，可变形为（　）

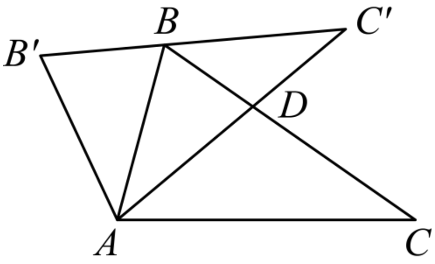
A. $(x-2)^2=7$　　B. $(x-2)^2=11$　　C. $(x+2)^2=7$　　D. $(x+2)^2=11$

5. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象如图所示，则点(a,bc)在（　　）



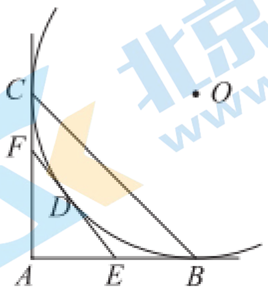
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C'=35°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 α 至 $\triangle AB'C'$，且 B'，B，C' 三点共线．若 $\angle CDC'=75°$，则 $\angle ABC=$（　　）



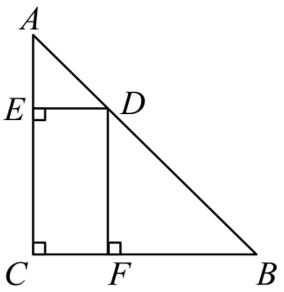
A. $40°$　　B. $60°$　　C. $70°$　　D. $80°$

7. 如图，过点 A 作 $\odot O$ 的切线 AB，AC，切点分别是 B，C，连接 BC．过 BC 上一点 D 作 $\odot O$ 的切线，交 AB，AC 于点 E，F．若 $\angle A=90°$，$\triangle AEF$ 的周长为 4，则 BC 的长为（　）



A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

8. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle C=90°$，$AC=BC=2$，点 D 为边 AB 上一点，过点 D 作 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$，垂足分别为 E，F，点 D 从点 A 出发沿 AB 运动至点 B．设 $DE=x$，$DF=y$，四边形 $CFDE$ 的面积为 S，在运动过程中，下列说法正确的是（　　）



A. y 与 x 满足一次函数关系，S 与 x 满足二次函数关系，且 S 存在最大值

B. y 与 x 满足一次函数关系，S 与 x 满足二次函数关系，且 S 存在最小值

C. y 与 x 满足反比例函数关系，S 与 x 满足二次函数关系，且 S 存在最大值

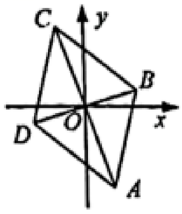
D. y 与 x 满足反比例函数关系，S 与 x 满足二次函数关系，且 S 存在最小值

二、填空题（本题共 20 分，每小题 2 分）

9. 请你写一个二次函数，其图象满足：①开口向下；②与 x 轴无交点，这个二次函数可以是__________.

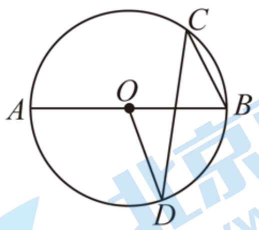
10. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-3=0$ 的一个根为 1，则 $m=$____.

11. 菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 $O(0,0)$，点 $A(1,-3)$，则点 C 的坐标为__________.



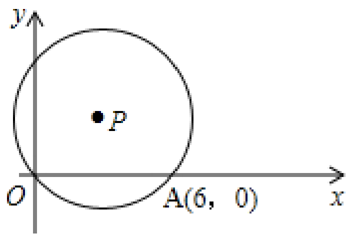
12. 抛物线 $y=x^2-3mx+m+3$ 经过原点，则 m z 的值为__________.

13. 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦（点 C 不与点 A，点 B 重合，且点 C 与点 D 位于直径 AB 两侧），若 $\angle AOD=110°$，则 $\angle BCD$ 等于______.



14. 已知二次函数 $y=ax^2+2ax-3(a>0)$，当自变量 x 分别取 -3，-1，2 时，所对应的函数值分别为 y_1,y_2,y_3，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为__________（用“>”或“<”连接）.

15. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，点 P 在第一象限，⊙P 与 x 轴交于 O，A 两点，点 A 的坐标为（6，0），⊙P 的半径为 $\sqrt{13}$，则点 P 的坐标为______.



16. 杭州亚运会的三个吉祥物“琮琮”“宸宸”“莲莲”组合名为“江南忆”，出自唐朝诗人白居易的名句“江南忆，最忆是杭州”，它融合了杭州的历史人文、自然生态和创新基因，吉祥物一开售，就深受大家的喜爱，经统计，某商店 4 月份某款亚运会吉祥物的销售量为 256 件，6 月份的销售量为 400 件，设该款吉祥物 4 月份到 6 月份销售量的月平均增长率为 x，则可列方程__________.

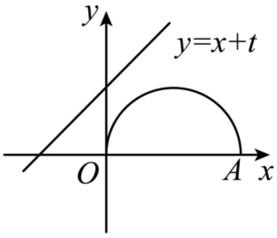
17. 已知一次函数 $y_1=kx+b(k\neq 0)$ 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的部分自变量和对应的函数值如下表：

x	…	1	2	3	4	5	…
y_1	…	0	1	2	3	4	…
y_2	…	0	-1	0	3	8	…

（1）二次函数的表达式为__________；

（2）关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<kx+b$ 的解集是__________.

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $\left(2\sqrt{2},0\right)$，以 OA 为直径在 x 轴上方作半圆，直线 l 的解析式为 $y = x + t$，若直线 l 与半圆只有一个公共点，则 t 的取值范围是__________.



三、解答题（本题共 64 分，19 题 10 分，20 题 5 分，21 题 6 分，22 题 5 分，23-26 题每题 6 分，27、28 题每题 7 分）

19. 解方程：

（1）$x^2-2x-24=0$

（2）$2x^2+4x+1=0$

20. 下面是小于同学设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.

已知：直线 l 及直线 l 外一点 P.

求作：直线 PQ，使得 $PQ\parallel l$.

小于同学的作法：如下，

（1）在直线 l 的下方取一点 O；

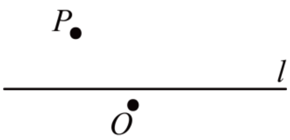
（2）以点 O 为圆心，OP 长为半径画弧，$\odot O$ 交直线 l 于点 C，D（点 C 在左侧），连接 CP；

（3）以点 D 为圆心，CP 长为半径画弧，交 $\odot O$ 于点 Q（点 Q 与点 P 位于直线 l 同侧）；

（4）作直线 PQ；所以直线 PQ 即为所求.

请你依据小于同学设计的尺规作图过程，完成下列问题.

（1）使用直尺和圆规，完成作图：（保留作图痕迹）



（2）完成下面的证明：

证明：连接 DP，

$\because CP=DQ$，

$\therefore \overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{DQ}$ __________（填推理的依据）.

$\therefore \angle PDC=$__________.

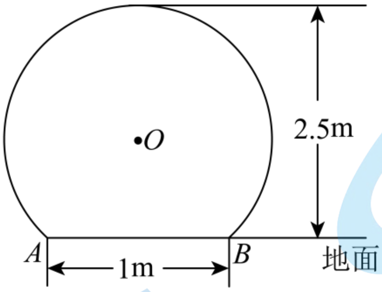
$\therefore PQ\parallel l$ __________（填推理的依据）.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2-(m-4)x-1=0$（m 为实数），

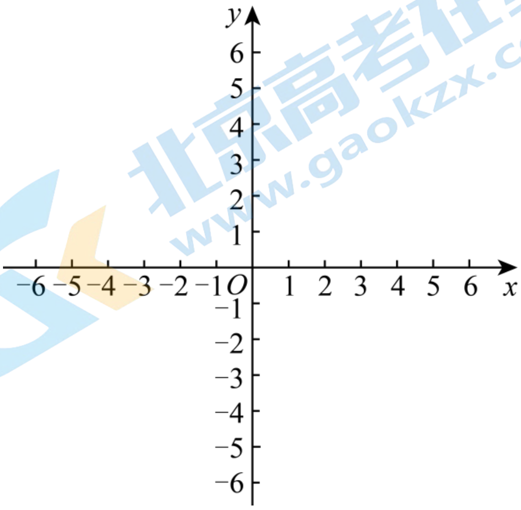
（1）若方程有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围；

（2）若 m 为整数，且该方程有一个根是负整数，求 m 的值.

22. “圆”是中国文化的一个重要精神元素，在中式建筑中有着广泛的应用，例如古典园林中的门洞，如图，某地园林中的一个圆弧形门洞的高为 2.5m，地面入口宽为 1m，求该门洞的半径.



23. 已知二次函数 $y=-x^2+4x-3$.



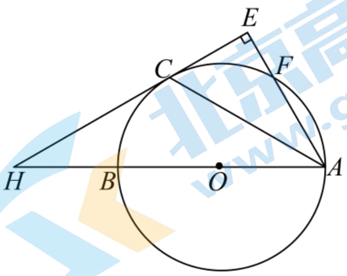
（1）将 $y=-x^2+4x-3$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式：__________；

（2）补全表格，则 $m=$__________，$n=$__________$(m<n)$，并在坐标系中利用描点法画出次二次函数的图象；

x	…	0	m	2	n	4	…
y	…	-3	0	k	0	-3	…

（3）若关于 x 的方程 $-x^2+4x-3-t=0$ 在 $0<x<3$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是__________.

24. 如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，$AE\perp CE$ 于点 E，交⊙O 于点 F，直线 CE 与直线 AB 交于点 H，AC 平分 $\angle EAH$.



（1）求证：EH 是$\odot O$ 的切线，;

（2）若 F 为 AC 中点，$\odot O$ 半径为 2，求 CE 的长.

25. 第19届杭州亚运会成功举办，中国女篮在最后时刻取得了令人振奋的胜利，黄思静在最后一秒稳稳地抢下后场篮板，最后由王思雨完成绝杀，以 74 比 72 险胜日本成功卫冕亚运会冠军，如图 1，球场上，一名1.85 米的运动员，当跳离地面的高度0.25 米时，球在头顶上方0.15 米处出手，然后准确落入篮框．已知篮框中心到地面的距离为3.05 米，当球与篮框的水平距离为1.5 米时，达到最大高度3.5 米.

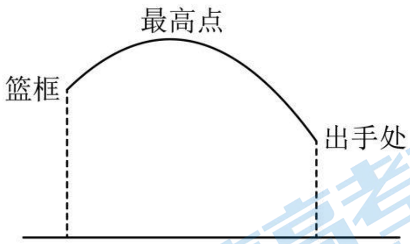


图1

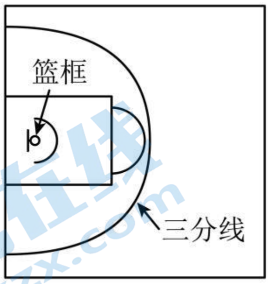


图2

（1）篮球出手处距离地面的高度是__________米；

（2）运动员投篮时站在三分线内还是三分线外，并说明理由（图 2 为篮球场平面示意图，三分线与篮框的水平距离是 6.75 米）.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点$(-2,-2)$在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a>0)$ 上.

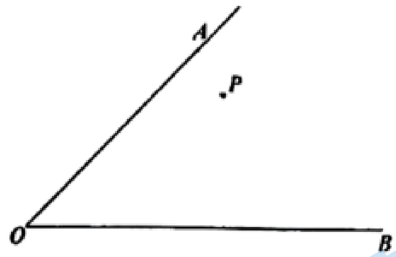
（1）①抛物线的对称轴为直线 $x=$__________；

②当$-3<x<-2$时，抛物线在 x 轴下方，当$1<x<2$时，抛物线在 x 轴上方，求此时抛物线的表达式；

（2）若抛物线上存在点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中 x_1,x_2 满足$0<x_1<x_2<4$且 $x_2-x_1=1$，使得 $|y_1-y_2|<1$，求 a 的取值范围.

27. 在学习旋转时，老师提出这样一个问题：

已知$\angle AOB$，点 P 为其内部一点，在 OA 与 OB 上分别求作点 M，N，使得$\triangle MNP$ 为等腰直角三角形，其中 $MP=NP$，$\angle MPN=90°$.



以下是同学们思考后的两种正确作法：

作法 1：如图 1，作 $PC\perp OB$ 于 C，以 P 为旋转中心将线段 PC 顺时针旋转$90°$到 PD，作 $DM\perp OB$ 交 OA 于 M，连接 PM，在 OC 延长线确定一点 N，使得 $CN=DM$，连接 PN，MN，则$\triangle MPN$ 即为所求.

作法 2：如图 2，过点 P 作 $PC\perp OB$ 于点 C，以 C 为圆心，CP 为半径作图，交 OB 于点 D，E，连接

PE，PD．作 $DM\perp OB$ 交 OA 于 M，连接 PM．作 $PN\perp PM$ 交 OB 于 N，连接 MN，则 $\triangle MPN$ 即为所求，

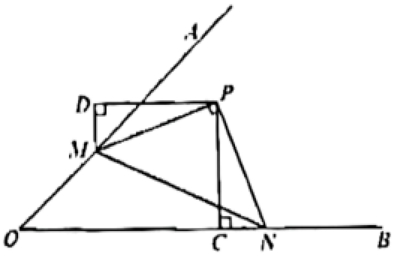


图 1

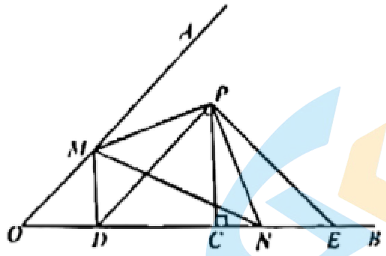


图 2

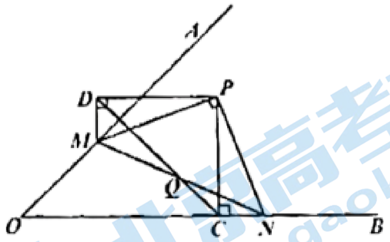


图 3

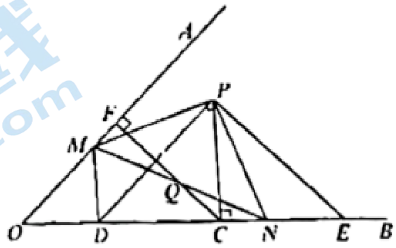


图 4

（1）请选择其中的一个作法，证明它是正确的．

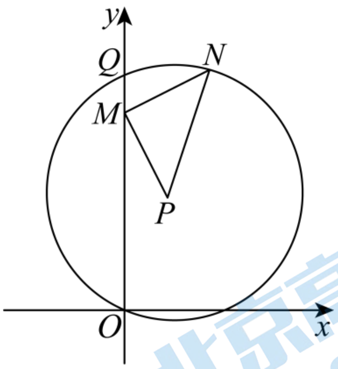
（2）从下列题目任选一题作答，

①如图 3，若 $\angle AOB=45°$，在图 1 中，连接 CD，交 MN 于点 Q．求证：$MQ=NQ$；

②如图 4，若 $\angle AOB=45°$，在图 2 中，过点 C 作 $CF\perp OA$，交 MN 于点 Q．求证：$MQ=NQ$．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P（不在坐标轴上）给出如下定义：以 P 为圆心，PO 为半径的 $\odot P$ 与 y 轴的另一个交点为 Q，若在线段 OQ，$\odot P$ 上分别存在点 M，N，使得 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形，其中 $\angle PMN=90°$，则称点 P 是完美点．

如图，若点 P 的坐标为点 $(1,3)$，则在线段 OQ，$\odot P$ 上分别存在点 $M(0,5)$，$N(2,6)$，使得 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形，其中 $\angle PMN=90°$，所以点 $P(1,3)$ 是完美点．



（1）下列点中是完美点的有__________（填序号）；

① $A(3,1)$；② $B(2,2)$

（2）已知 $P(m,n)$ 为抛物线 $y=x^2$ 上一点，若 P 为完美点，求 m 的取值范围：

（3）已知直线 l： $y=x+2$，点 A 为直线 l 上一点，若以 $A\left(x_0,y_0\right)$ 为圆心，半径为 l 的 $\odot A$ 上无完美点，求 x_0 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）（每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1.【答案】C

【分析】根据“左加右减，上加下减”的法则进行解答即可.

【详解】解：将抛物线 $y=x^2$ 向左平移1个单位长度，再向下平移3个单位长度为 $y=\left(x+1\right)^2-3$.

故选：C.

【点睛】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知二次函数图象平移的法则是解答此题的关键.

2.【答案】C

【分析】根据直径所对的圆周角是90°，求出∠ADC，再根据圆周角的性质，求出∠ABC.

【详解】解：∵ AB 是⊙O 的直径，

∴∠ADB=90°，

∵ $\angle CDB=32°$，

∴∠ADC=90°-32°=58°，

∴∠ABC=∠ADC=58°，

故选：C.

【点睛】本题考查了直径所对圆周角是90°和圆周角的性质，解题关键是根据同弧把要求的角转化为与已知有关系的角.

3.【答案】A

【分析】先解一元二次方程，得到 d 值，再比较 d 与半径 8 的大小，若 $d>8$，则点 P 在⊙O 的外部，若 $d<8$，则点 P 在⊙O 的内部，若 $d=8$，则点 P 在⊙O 上，即可解答.

【详解】解：解方程 $x^2-4x-5=0$ 可得，$x_1=5$，$x_2=-1$，

∵点 P 到圆心 O 的距离 d 为方程 $x^2-4x-5=0$ 的一个根，

∴ $d=5<8$，

∴点 P 在⊙O 的内部，

故选 A

【点睛】本题考查了点与圆的位置关系、解一元二次方程，熟练掌握点与圆的位置关系的判断方法是解答的关键.

4.【答案】B

【分析】移项后两边配上一次项系数一半的平方即可得.

【详解】解：∵$x^2-4x=7$，

∴$x^2-4x+4=7+4$，即（x-2）^{2}=11，

故选：B.

【点睛】此题考查解一元二次方程-配方法，解题关键在于掌握将一元二次方程配成（x+m）^{2}=n 的形式，

再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法.

5.【答案】C

【分析】直接根据函数图象，可以判断开口方向，对称轴的位置和抛物线与 y 轴交点位置，

记忆方法：开口向下，$a<0$，开口向上，$a>0$，b 的符号结合对称轴位置即可判定，c 的符号可直接读取.

【详解】由题可知，抛物线开口向下；

$\therefore a<0$；

$\because$ 对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，结合 $a<0$；

$\therefore b>0$；

$\because$ 抛物线交 y 轴负半轴；

$\therefore c<0$；

$\therefore a<0$，$bc<0$；

$\therefore$ 点 (a,bc) 位于第三象限；

故选 C

6.【答案】C

【分析】本题考查了旋转的性质，以及等边对等角的性质及三角形的内角和、外角定理，平角定义等，熟练运用这些知识是正确解题的关键.

根据旋转的性质可以得到对应边 $AB=AB'$，对应角 $\angle C'=\angle C$，$\angle B'=\angle ABC$ 旋转角 $\angle CAC'=\angle BAB'$，根据三角形的内角和及外角定理可求得旋转角进而即可求出 $\angle ABC$.

【详解】解：由旋转可得：$AB=AB'$，$\angle CAC'=\angle BAB'$，$\angle C'=\angle C$，

$\because \angle C'=35^\circ$，$\angle CDC'=75^\circ$，

$\therefore \angle CBC'=\angle CDC'-\angle C'=40^\circ$，

$\angle CAC'=\angle CDC'-\angle C=40^\circ$，

$\therefore \angle BAB'=40^\circ$，

$\therefore \angle ABB'=\angle AB'B=\dfrac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$，

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle ABB'-\angle CBC'=70^\circ$.

故选：C.

7.【答案】B

【分析】本题考查切线长定理．利用切线长定理得出 $AB=AC$，$DF=FC$，$DE=EB$，再根据三角形周长等于 4，可求得 $AB=AC=2$，从而利用勾股定理可求解.

【详解】解：$\because AB$，AC 是 $\odot O$ 的切线，切点分别是 B，C，

$\therefore AB=AC$，

$\because DF$、DE 是 $\odot O$ 的切线，切点是 D，交 AB，AC 于点 E，F，

$\therefore DF=FC$， $DE=EB$，

$\because \triangle AEF$ 的周长为4，即 $AF+EF+AE=AF+DF+DE+AE=AC+AB=4$，

$\therefore AB=AC=2$，

$\because \angle A=90°$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

故选：B．

【点睛】本题考查切线长定理，勾股定理，熟练掌握切线长定理是解题的关键．

8.【答案】A

【分析】本题考查了等腰直角三角形的性质，矩形的判定和性质，一次函数和二次函数的定义，二次函数求最值．由等腰直角三角形的性质可得 $\angle A=\angle B=45°$，再由 $DF\perp BC$， $DE\perp AC$，推出 $\triangle AED$ 和 $\triangle DFB$ 是等腰直角三角形，四边形 $CFDE$ 是矩形，进而可得 y 与 x 的关系，再根据矩形的面积公式可得 S 与 x 的关系式，化为顶点式，即可得到最值．

【详解】解：$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle C=90°$，

$\therefore \angle A=\angle B=45°$，

$\because DF\perp BC$， $DE\perp AC$，

$\therefore \triangle AED$ 和 $\triangle DFB$ 是等腰直角三角形，四边形 $CFDE$ 是矩形，

$\therefore CF=DE=AE=x$， $BF=DF=y$，

$\because AC=BC=2$，

$\therefore BF=BC-CF$ 即 $y=2-x$，

$\therefore y$ 与 x 满足一次函数关系，

$\because S=CF\times DF=x(2-x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$，最大值为1，

$\therefore S$ 与 x 满足二次函数关系，且 S 存在最大值．

故选：A．

二、填空题（本题共20分，每小题2分）

9.【答案】 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$（答案不唯一）

【分析】开口向下，则二次项系数小于零，与 x 轴无交点，则顶点坐标的纵坐标小于零，由此即可求解，本题主要考查二次函数图象的性质，掌握二次函数图象的性质，顶点式是解题的关键．

【详解】解：根据题意得， $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$，

故答案为： $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$（答案不唯一）．

10.【答案】2

【分析】把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx-3=0$， 然后解关于 m 的方程即可．

【详解】解：把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx-3=0$ 得 $1+m-3=0$，

解得：$m=2$，

故答案为：2.

【点睛】此题考查了一元二次方程的解，解题的关键是正确理解能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

11.【答案】$(-1,3)$

【分析】本题考查了菱形的性质，两点的中点坐标．熟练掌握菱形的对角线互相平分是解题的关键.

由菱形的性质可知，O 为 AC 的中点，进而可求点 C 的坐标.

【详解】解：∵菱形 $ABCD$，

∴ O 为 AC 的中点，

∵ $O(0,0)$，$A(1,-3)$，

∴ $C(-1,3)$，

故答案为：$(-1,3)$.

12.【答案】-3

【分析】本题考查了二次函数与坐标轴的交点问题，将 $(0,0)$ 代入解析式，即可求解.

【详解】解：∵抛物线 $y=x^2-3mx+m+3$ 经过原点，

∴ $m+3=0$

解得：$m=-3$

故答案为：-3.

13.【答案】$35°$

【分析】首先可求得 $\angle BOD$ 的度数，再根据圆周角定理，即可求解.

【详解】解：∵ $\angle AOD=110°$，

∴ $\angle BOD=180°-\angle AOD=180°-110°=70°$，

∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 70°=35°$，

故答案为：$35°$.

【点睛】本题考查了圆周角定理，熟练掌握和运用圆周角定理是解决本题的关键.

14.【答案】$y_2<y_1<y_3$ ## $y_3>y_1>y_2$

【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，利用二次函数图象上点的坐标特征，分别求出 y_1,y_2,y_3 的值，结合 $a>0$，即可得到答案.

【详解】解：当 $x=-3$ 时，$y_1=(-3)^2a+2a\times(-3)-3=3a-3$，

当 $x=-1$ 时，$y_2=(-1)^2a+2a\times(-1)-3=-a-3$，

当 $x=2$ 时，$y_3=2^2\times a+2a\times 2-3=8a-3$，

$\because a>0$，

$\therefore -a-3<3a-3<8a-3$，

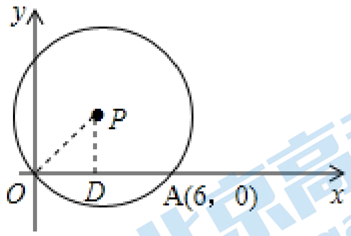
$\therefore y_2<y_1<y_3$，

故答案为：$y_2<y_1<y_3$．

15.【答案】（3，2）．

【分析】过点 P 作 PD⊥x 轴于点 D，连接 OP，先由垂径定理求出 OD 的长，再根据勾股定理求出 PD 的长，故可得出答案．

【详解】过点 P 作 PD⊥x 轴于点 D，连接 OP，



∵A（6，0），PD⊥OA，

∴OD=$\frac{1}{2}$OA=3，

在 Rt△OPD 中 ∵OP=$\sqrt{13}$ OD=3，

∴PD=2

∴P(3，2)．

故答案为（3，2）．

【点睛】本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键．

16.【答案】$256(1+x)^2=400$

【分析】本题考查了一元二次方程中增长率的知识．设月平均增长率为x，根据 4 月及 6 月的销售量，即可得出关于x的一元二次方程，此题得解．

【详解】解：设月平均增长率为x，

根据题意得：$256(1+x)^2=400$．

故答案为：$256(1+x)^2=400$．

17.【答案】 ①. $y_2=x^2-4x+3$ ②. $1<x<4$

【分析】本题主要考查二次函数与不等式，待定系数法求二次函数；

（1）把$(1,0)$，$(4,3)$，$(3,0)$代入$y_2=ax^2+bx+c(a\neq0)$，求出 a、b、c 的值，即可得出y_2的表达式；

（2）利用表中数据得到直线与抛物线的交点为$(1,0)$和$(4,3)$，$1<x<4$时，$y_2<y_1$，从而得出不等式$ax^2+bx+c<kx+b$的解集．

解题关键在于掌握对于二次函数$y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq0$）与不等式的关系，利用两个

函数图象在直角坐标系中的上下位置关系求自变量的取值范围，可作图利用交点直观求解，也可把两个函数解析式列成不等式求解.

【详解】解：（1）把$(1,0)$，$(4,3)$，$(3,0)$代入$y_2=ax^2+bx+c(a\neq 0)$得：

$$\begin{cases}a+b+c=0\\16a+4b+c=3\\9a+3b+c=0\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=3\end{cases}$

$\therefore y_2=x^2-4x+3$；

故答案为：$y_2=x^2-4x+3$；

（2）当$x=1$时，$y_1=y_2=0$；当$x=4$时，$y_1=y_2=3$，

$\therefore$直线与抛物线的交点为$(1,0)$和$(4,3)$，

而$1<x<4$时，$y_2<y_1$，

$\therefore$不等式$ax^2+bx+c<kx+b$的解集是$1<x<4$.

故答案为：$1<x<4$.

18.【答案】$t=2-\sqrt{2}$或$-2\sqrt{2}\le t<0$

【分析】根据题意得到当直线l与半圆相切时，直线l与半圆只有一个公共点，利用等腰直角三角形的性质求出$CE=BC=OB=\frac{1}{2}OA=\sqrt{2}$，然后利用勾股定理得到$BE=\sqrt{CE^2+BC^2}=2$，然后利用$\triangle DEO$是等腰直角三角形得到$OD=OE=2-\sqrt{2}$，进而得到$t=2-\sqrt{2}$，当直线$l$经过点$O$时，直线$l$与半圆有两个公共点，得到$t=0$，当直线$l$经过点$A$时，直线$l$与半圆只有一个公共点，求出$t=-2\sqrt{2}$，进而结合图形求解即可.

【详解】如图所示，直线与x轴的夹角为$45°$，当直线l与半圆相切时，直线l与半圆只有一个公共点，

$\therefore BC\perp CD$

$\therefore \angle CBO=45°$

$\therefore \triangle BCE$是等腰直角三角形

$\because$点A的坐标为$(2\sqrt{2},0)$，

$\therefore AO=2\sqrt{2}$

$\therefore CE=BC=OB=\frac{1}{2}OA=\sqrt{2}$

$\therefore BE=\sqrt{CE^2+BC^2}=2$

$\therefore OE = BE - OB = 2 - \sqrt{2}$

$\because \angle DEO = 45°$，$\angle DOE = 90°$

$\therefore \angle EDO = 45°$

$\therefore \triangle DEO$ 是等腰直角三角形

$\therefore OD = OE = 2 - \sqrt{2}$，

$\therefore$此时 $t = 2 - \sqrt{2}$，

当直线 l 经过点 O 时，直线 l 与半圆有两个公共点，

$\therefore$此时 $t = 0$，

当直线 l 经过点 A 时，直线 l 与半圆只有一个公共点，

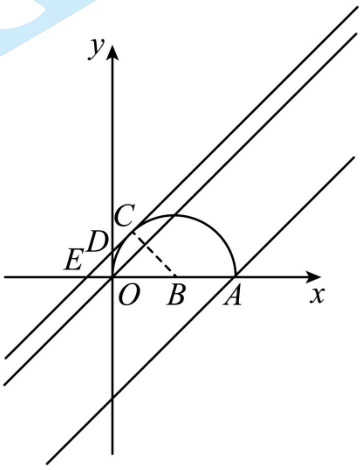
$\therefore$将 $A\left(2\sqrt{2},0\right)$ 代入 $y = x + t$，得 $0 = 2\sqrt{2} + t$

解得 $t = -2\sqrt{2}$，

$\therefore$当 $-2\sqrt{2} \le t < 0$ 时，直线 l 与半圆只有一个公共点，

综上所述，当 $t = 2 - \sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2} \le t < 0$ 时，直线 l 与半圆只有一个公共点.

故答案为：$t = 2 - \sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2} \le t < 0$.



【点睛】本题考查直线与圆的位置关系，一次函数的应用，勾股定理，等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是理解题意，学会利用特殊位置解决实际问题.

三、解答题（本题共 64 分，19 题 10 分，20 题 5 分，21 题 6 分，22 题 5 分，23-26 题每题 6 分，27、28 题每题 7 分）

19.【答案】（1）$x_1 = -4$，$x_2 = 6$

（2）$x_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，

（1）运用因式分解进行计算即可得；

（2）移项，系数化为 1，运用配方法进程计算即可得；

掌握因式分解法，配方法是解题的关键．

【小问 1 详解】

解：$x^2-2x-24=0$，

$(x+4)(x-6)=0$，

$x_1=-4$，$x_2=6$；

【小问 2 详解】

解：$2x^2+4x+1=0$，

$x^2+2x=-\frac{1}{2}$，

$x^2+2x+1=-\frac{1}{2}+1$，

$(x+1)^2=\frac{1}{2}$，

$x+1=\pm\frac{1}{2}$，

$x+1=\pm\frac{1}{2}$，

$x=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$x_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

20.【答案】（1）见解析；　（2）见解析

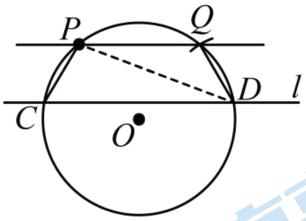
【分析】本题主要考查作图－复杂作图，

（1）根据要求作图即可；

（2）根据圆的有关性质和平行线的判定求解即可．

【小问 1 详解】

解：直线 PQ 如图所示．



；

【小问 2 详解】

证明：连接 DP

$\because CP=DQ$

$\therefore CP=DQ$（在同圆中，等弦所对的弧相等）．

$\therefore \angle PDC=\angle DPQ$（在同圆中，等弧所对的圆周角相等）.

$\therefore PQ \mathbin{/\mkern-6mu/} l$（内错角相等，两直线平行），

故答案为：在同圆中，等弦所对的弧相等；$\angle DPQ$；内错角相等，两直线平行.

21.【答案】（1）$m<2$ 或 m>2 且 $m\neq 3$

（2）m 的值为 4

【分析】（1）运用一元二次方程的根的判别式“$\Delta=b^2-4ac>0$”，解不等式即可求解；

（2）运用求根公式分别计算出方程的两个根据，根据方程有一个根是负整数，不等式的性质即可求解；

本题主要考查一元二次方程根与系数的关系，解一元一次不等式，掌握根的判别式，求根公式，求不等式的解集是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：关于 x 的一元二次方程 $\left(m-3\right)x^2-\left(m-4\right)x-1=0$（$m$ 为实数），

$\therefore a=m-3$，$b=-(m-4)$，$c=-1$，

$\because$ 方程有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=\left[-\left(m-4\right)\right]^2-4(m-3)\times\left(-1\right)>0$，整理得，$m^2-4m+4>0$，

$\therefore \left(m-2\right)^2>0$，解得，m>2 或 $m<2$，

$\because$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore m-3\neq 0$，解得，$m\neq 3$，

$\therefore m$ 的取值范围为：$m<2$ 或 $\mathrm{m}>2$ 且 $m\neq 3$.

【小问 2 详解】

解：关于 x 的一元二次方程 $\left(m-3\right)x^2-\left(m-4\right)x-1=0$（$m$ 为实数），

$$\therefore x=\frac{(m-4)\pm\sqrt{(m-4)^2+4(m-3)}}{2(m-3)}=\frac{(m-4)\pm\sqrt{(m-2)^2}}{2(m-3)},$$

由（1）可知，$x=\dfrac{(m-4)\pm\left(m-2\right)}{2(m-3)}$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{m-3}$，

$\because$ 方程有两个不相等的实根，且该方程有一个根是负整数，

$\therefore -\dfrac{1}{m-3}<0$，

$\therefore m-3=1$，

$\therefore m=4$，即 m 的值为 4；

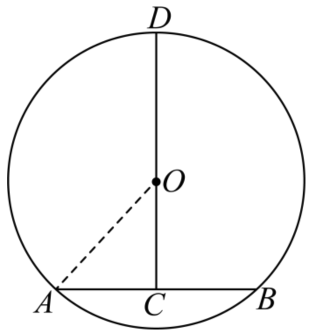
22.【答案】该门洞的半径为1.3m .

【分析】本题考查了垂径定理的应用，运用圆的性质，垂径定理构造直角三角形，用勾股定理求解即可.

【详解】解：如图，连接OA，

设圆心为点O，洞高为$DC=2.5\text{m}$，入口宽为$AB=1\text{m}$，门洞的半径为$x\text{m}$，

根据题意，得$OC=(2.5-x)\text{m}$，$AC=\frac{1}{2}AB=0.5\text{m}$，



根据勾股定理，得$x^2=(2.5-x)^2+(0.5)^2$，

解得$x=1.3$，

答：该门洞的半径为1.3m．

23.【答案】（1）$y=-(x-2)^2+1$

（2）1，3，图象见解析

（3）$0<t<1$

【分析】（1）利用配方法将函数解析式进行转换即可；

（2）令$y=0$，即可求得$m=1$，$n=3$，然后根据表格中数据描点、连线即可；

（3）由题意可知要使得方程在$0<x<3$的范围内有解，只需函数$y=-x^2+4x-3$与$y=t$有交点即可，由图可知，$y=t$在$y=1$与x轴之间，进而可得$0<t<1$．

【小问1详解】

解：$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$，

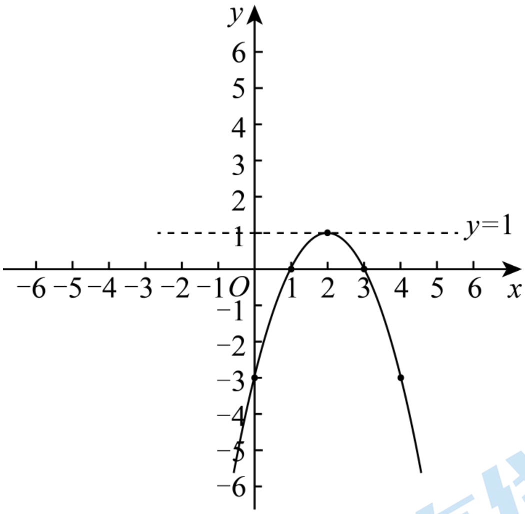
故答案为：$y=-(x-2)^2+1$；

【小问2详解】

令$y=0$，$-x^2+4x-3=0$，解得：$x_1=1$，$x_2=3$，

$\therefore m=1$，$n=3$；

则，在坐标系中描点、连线：



故答案为：1，3；

【小问 3 详解】

$\because -x^2+4x-3-t=0$，

$\therefore -x^2+4x-3=t$，

即：方程$-x^2+4x-3-t=0$的解可看作函数$y=-x^2+4x-3$与$y=t$交点的横坐标，

要使得方程在$0<x<3$的范围内有解，只需函数$y=-x^2+4x-3$与$y=t$有交点即可，

由图可得：$y=t$在$y=1$与x轴之间，则$0<t<1$，

故答案为：$0<t<1$.

【点睛】本题考查了二次函数的图象及性质，二次函数图象上点的坐标特征，二次函数与一元二次方程的关系，解一元二次方程，画出函数图象，利用数形结合的数学思想是解决问题的关键.

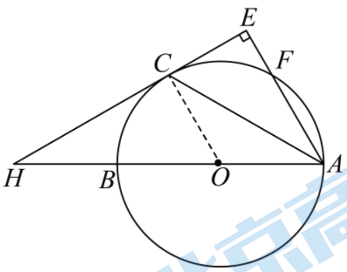
24.【答案】（1）见解析　（2）$CE=\sqrt{3}$.

【分析】（1）连接OC，根据切线的性质和已知求出$OC \parallel AE$，求出$\angle CAE=\angle ACO$，即可得出答案；

（2）连接OC，CF，OF，证明四边形$AOCF$是菱形，推出$\triangle OAF$是等边三角形，求得$\angle ECF=30°$，利用含 30 度角的直角三角形的性质以及勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解：连接OC，



$\because AC$平分$\angle DAB$，

$\therefore \angle CAE=\angle CAO$，

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle CAO = \angle ACO$，

$\therefore \angle CAE = \angle ACO$，

$\therefore OC \parallel AE$，

又$\because AE \perp CE$，

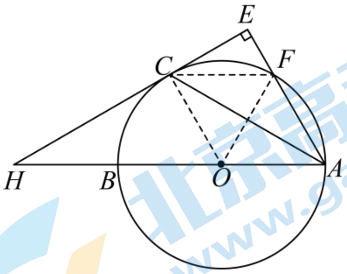
$\therefore CE \perp OC$，

$\because OC$ 是半径，

即直线 EH 是$\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解：连接OC， CF， OF，



$\because F$ 为 AC 中点，

$\therefore CF = AF$，

$\therefore CF = AF$，

$\therefore \angle CAF = \angle ACF$，

$\because AC$ 平分$\angle DAB$，

$\therefore \angle CAF = \angle CAO$，

$\therefore \angle CAF = \angle CAO = \angle ACF = \angle ACO$，又 $AC = CA$，

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle FAC$，

$\therefore OA = AF$， $OC = CF$，

$\because OA = OC$，

$\therefore OA = AF = OC = CF$，则四边形 $AOCF$ 是菱形，

$\therefore OA = AF = OC = CF = 2 = OF$， $CF \parallel AO$，

$\therefore \triangle OAF$ 是等边三角形，

$\therefore \angle EFC = \angle FAO = 60°$，

$\because AE \perp CE$，

$\therefore \angle ECF = 30°$，

$\because CF = 2$，

$\therefore EF = \frac{1}{2}CF = 1$，

$\therefore CE = \sqrt{CF^2 - EF^2} = \sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了切线的判定，圆内接四边形性质，菱形的判定和性质，勾股定理，$30°$ 直角三角形的性质，能灵活运用知识点进行推理是解此题的关键.

25.【答案】（1）2.25

（2）运动员投篮时站在三分线内，理由见详解

【分析】（1）根据球员投球时的数量关系即可求解；

（2）根据题意建立平面直角坐标系，可得顶点坐标为，设抛物线的解析式为 $y=a\left(x-1.5\right)^2+3.5$，且抛物线过 $\left(0,3.05\right)$，运用待定系数法即可求解抛物线解析式，当投球高度为 2.25 米可算运动员与蓝框的距离，由此即可求解；

本题主要考查二次函数的实际运用，理解题目中数量关系，掌握顶点式解实际问题的方法是解题的关键.

【小问 1 详解】

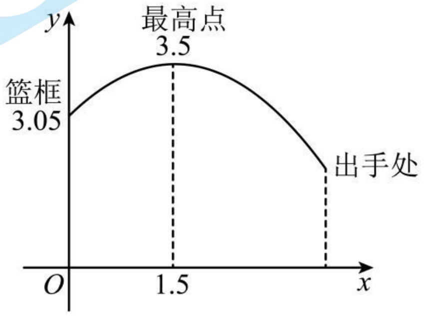
解：∵一名 1.85 米的运动员，当跳离地面的高度 0.25 米时，球在头顶上方 0.15 米处出手，

∴篮球出手处距离地面的高度是 $1.85+0.25+0.15=2.25$（米），

故答案为：2.25.

【小问 2 详解】

解：根据题意建立平面直角坐标系，如图所示，



∵球与篮框的水平距离为 1.5 米时，达到最大高度 3.5 米，

∴投球的抛物线的顶点坐标为 $(1.5,3.5)$，

设抛物线的解析式为 $y=a\left(x-1.5\right)^2+3.5$，已知篮框中心到地面的距离为 3.05 米，即抛物线过 $\left(0,3.05\right)$，

∴ $3.05=a\left(0-1.5\right)^2+3.5$，解得，$a=-\frac{1}{5}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{5}(x-1.5)^2+3.5$，

由（1）可知，球的出手高度为 2.25 米，即 $y=2.25$，

∴ $-\frac{1}{5}(x-1.5)^2+3.5=2.25$，解得，$x_1=4$，$x_2=-1$（不符合题意，舍去），

∵ $x=4<6.75$，

∴运动员投篮时站在三分线内.

26.【答案】(1)①-1;② $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{5}x-2$

(2) $0<a\le\frac{1}{9}$

【分析】(1)把$(-2,-2)$代入解析式，确定$b=2a$，代入$x=-\frac{b}{2a}$计算即可;;

(2)根据题意，结合对称轴$x=-1$对称，可知抛物线经过$(-3,0)$和$(1,0)$，代入解析式确定a，b的值即可

(3)由二次函数的性质结合题意可知$y_2>y_1$，$y_2-y_1=a(x_2+x_1+2)$，由$0<x_1<x_2<4$可得$0<x_1<3$，则$3<2x_1+3<9$，进而可知$\frac{1}{9}<\frac{1}{2x_1+3}<\frac{1}{3}$，要使得$|y_1-y_2|<1$，即$y_2-y_1=a(2x_1+3)<1$，只需要使得$a<\frac{1}{2x_1+3}$成立即可，进而可得$0<a\le\frac{1}{9}$.

【小问1详解】

解：①将$(-2,-2)$代入解析式$y=ax^2+bx-2(a>0)$,

得：$4a-2b-2=-2$，解得：$b=2a$,

∴抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2a}{2a}=-1$,

故答案为：-1;

②∵抛物线的对称轴为直线$x=-1$，则设$y=a(x+1)^2+k(a>0)$,

∴当$x=-3$时，$y_1=4a+k$，当$x=1$时，$y_2=4a+k$,

即：$(-3,y_1)$与$(1,y_2)$关于对称轴$x=-1$对称，

∵当$-3<x<-2$时，抛物线在x轴下方，当$1<x<2$时，抛物线在x轴上方，

∴ $y_1=y_2=0$，即：抛物线经过$(-3,0)$和$(1,0)$,

将$(-3,0)$和$(1,0)$代入解析式$y=ax^2+bx-2(a>0)$,

得：$\begin{cases}9a-3b-2=0\\a+b-2=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$,

∴此时抛物线的表达式$y=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{5}x-2$;

【小问2详解】

由(1)可知：抛物线的对称轴为直线$x=-1$，$b=2a$,

∴ $y=ax^2+2ax-2(a>0)$，当$x>-1$时，y随x的增大而增大，则$y_2>y_1$,

$y_1 = ax_1^2 + 2ax_1 - 2$，$y_2 = ax_2^2 + 2ax_2 - 2$，

则：$y_2 - y_1 = \left(ax_2^2 + 2ax_2 - 2\right) - \left(ax_1^2 + 2ax_1 - 2\right) = a\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right) + 2a\left(x_2 - x_1\right)$，

$\because x_2 - x_1 = 1$，

$\therefore y_2 - y_1 = a\left(x_2 + x_1 + 2\right)$

$\because 0 < x_1 < x_2 < 4$，

$\therefore y_1 < y_2$，

$\because x_2 - x_1 = 1$，则 $x_2 = x_1 + 1$，$y_2 - y_1 = a\left(x_1 + 1 + x_1 + 2\right) = a\left(2x_1 + 3\right)$

$\therefore x_1 + 1 < 4$，可得：$x_1 < 3$，

$\therefore 0 < x_1 < 3$，则 $3 < 2x_1 + 3 < 9$，

$\therefore \frac{1}{9} < \frac{1}{2x_1 + 3} < \frac{1}{3}$，

$\because$ 要使得 $\left|y_1 - y_2\right| < 1$，

即：$y_2 - y_1 = a\left(2x_1 + 3\right) < 1$，

只需要使得 $a < \frac{1}{2x_1 + 3}$ 成立即可，

$\therefore 0 < a \le \frac{1}{9}$，

综上，a 的取值范围为 $0 < a \le \frac{1}{9}$.

【点睛】本题考查了待定系数法，抛物线的对称性，二次函数与不等式的综合，熟练掌握待定系数法，对称性，利用二次函数与不等式的性质得 $y_2 - y_1 = a\left(2x_1 + 3\right) < 1$，$3 < 2x_1 + 3 < 9$ 是解题的关键.

27. 【答案】（1）证明过程见详解

（2）证明过程见详解

【分析】（1）作法 1，根据题意证明 $Rt\triangle PCN \cong Rt\triangle PDM\left(SAS\right)$；作法 2，根据题意证明 $\triangle MPD \cong \triangle NPE\left(ASA\right)$ 即可求证；

（2）①根据等腰直角三角形的判定和性质，可证 $\triangle GMQ \cong \triangle NCQ\left(AAS\right)$，由此即求解；②证明方法同①.

【小问 1 详解】

证明：作法 1，$\because PC \perp OB$，$PD \perp DM$，

$\therefore \angle PCN = \angle D = 90°$，

$\because$ 以 P 为旋转中心将线段 PC 顺时针旋转 $90°$ 到 PD，

$\therefore PC = PD$， $\angle CPD = 90^\circ$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCN, \mathrm{Rt}\triangle PDM$ 中，

$$\begin{cases} CN = DM \\ \angle PCN = \angle D, \\ PC = PD \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PCN \cong \mathrm{Rt}\triangle PDM(\mathrm{SAS})$，

$\therefore PN = PM$， $\angle CPN = \angle DPM$，

$\because \angle CPD = 90^\circ = \angle DPM + \angle MPC$，

$\therefore \angle CPN + \angle MPC = 90^\circ$，即 $PM \perp PN$， 且 $PN = PM$，

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰直角三角形；

作法 2，$\because PC \perp OB$ 于点 C， 以 C 为圆心， CP 为半径作图，

$\therefore CP = CD = CE$， 且 DE 是 $\odot C$ 的直径，

$\therefore \angle DPE = 90^\circ$，即 $DP \perp EP$，

$\therefore \triangle CDP, \triangle CEP$ 是等腰直角三角形，且 $\angle PCD = \angle PCE = 90^\circ$，

$\therefore \triangle CDP \cong \triangle CEP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore PD = PE$， 即 $\triangle DEP$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle PEC = \angle PDC = 45^\circ$，

$\because DM \perp OB$，

$\therefore \angle MDC = 90^\circ = \angle MDP + \angle PDC$，

$\therefore \angle MDP = 90^\circ - \angle PDC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$，

$\therefore \angle PEC = \angle PDM = 45^\circ$，

$\because PM \perp PN$，

$\therefore \angle MPD + \angle DPN = 90^\circ$，

$\because \angle DPE = 90^\circ = \angle DPN + \angle NPE$，

$\therefore \angle MPD = \angle NPE$，

在 $\triangle MPD, \triangle NPE$ 中，

$$\begin{cases} \angle MDP = \angle NEP \\ PD = PE \\ \angle MPD = \angle NPE \end{cases},$$

$\therefore \triangle MPD \cong \triangle NPE(\mathrm{ASA})$，

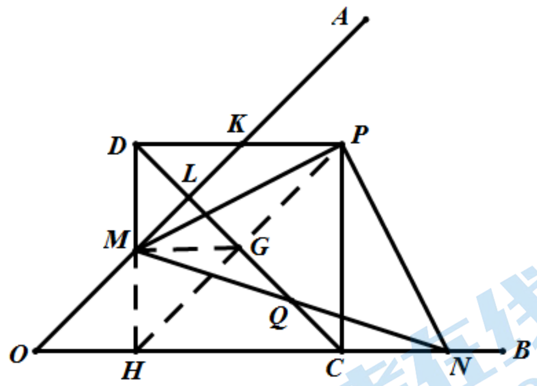
$\therefore PM = PN$， 且 $PM \perp PN$，

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰直角三角形．

【小问 2 详解】

证明：①如图所示，根据作图及证明可知$\triangle PMN,\triangle CDP$都是等腰直角三角形，

$\angle DPC=\angle MPN=90^\circ$，$DM\perp OB$，$PC\perp OB$，延长$DM$交$OB$与点$H$，连接$PH$交$DC$与点$G$，连接$MG$，$DP$与$OA$交于点$K$，$DC$与$MK$交于点$L$，



$\therefore\angle DPC=\angle PCH=\angle CHD=90^\circ$，$PC=PD$，

$\therefore$四边形$CPDH$是正方形，

$\therefore$对角线CD,PH相互平分，点G是CD,PH的中点，

$\because\angle AOB=45^\circ$，$DH\perp OB$，即$\angle MHO=90^\circ$，

$\therefore\angle OMH=45^\circ=\angle DMA$，且$\angle MDP=90^\circ$，$\angle PDC=45^\circ$，

$\therefore\angle MDC=45^\circ$，

$\therefore DL\perp MK$，则$\angle DLK=90^\circ$，$\angle DKL=45^\circ$，

$\therefore\triangle DKM$是等腰直角三角形，

$\because$在$Rt\triangle MGL$中，$\angle LMG+\angle LGM=90^\circ$，

在$Rt\triangle DHG$中，$\angle LGM+\angle HGM=90^\circ$，

$\therefore\angle LMG=\angle HGM$，

$\therefore\angle LGM=\angle MHG=45^\circ$，

$\therefore\angle LMG=\angle OMH=\angle MGH=45^\circ$，

$\therefore GM\perp DH$，且$\angle MDG=\angle MGD=45^\circ$，

$\therefore\triangle DMG$是等腰直角三角形，则$DM=GM$，

同理，$\triangle MHG$是等腰直角三角形，则$HM=GM$，

$\therefore MG=\frac{1}{2}DH$，即点$M$是$DH$的中点，

$\because$点G是CD的中点，

$\therefore GM$是$\triangle CDH$的中位线，则$GM=\frac{1}{2}CH$，$GM\parallel CH$，

$\therefore\angle MGQ=\angle NCQ$，

$\because DM=CN$，

$\therefore GM=CN$，

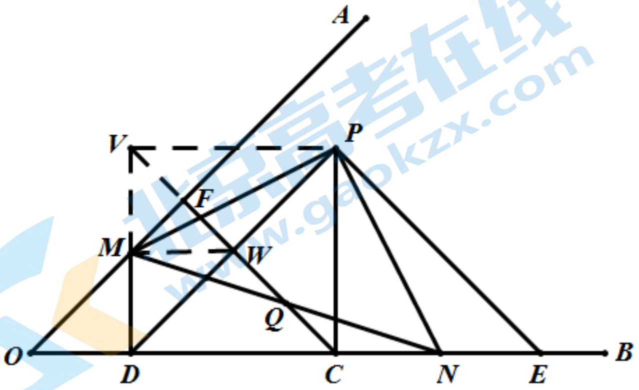
在$\triangle GMQ,\triangle NCQ$中，

$$\begin{cases}\angle MGQ=\angle NCQ\\ \angle GQM=\angle CQN,\\ GM=CN\end{cases}$$

$\therefore \triangle GMQ\cong\triangle NCQ(\mathrm{AAS})$，

$\therefore MQ=NQ$；

②如图所示，过点P作$PV\perp DM$延长线于点V，CQ与DP交于点W，连接MW，可得正方形$PCDV$，DP是对角线，



$\because \angle AOB=45^\circ=\angle PDC$，

$\therefore DP\,/\!/\,OA$，且$CF\perp OA$，

$\therefore CF\perp DP$，则延长CF交于点V，

证明方法同上，$WM\,/\!/\,DC$，$WM=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{1}{2}DV$，

$\therefore MW=CN$，$\angle WQM=\angle CQN$，$\angle MWQ=\angle NCQ$，

$\therefore \triangle WMQ\cong\triangle NCQ(\mathrm{AAS})$，

$\therefore MQ=NQ$.

【点睛】本题主要考查等腰直角三角形的判定和性质，作图，掌握等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，添加辅助线，构造三角形全等，中位线的判定和性质等知识的综合运用是解题的关键.

28.【答案】(1) ②　(2) $m\le -1$或$m\ge 1$

(3) $x_0<-1$

【分析】(1) 根据新定义分析，设$P(x,y)$，则$OP=\sqrt{x^2+y^2}$，得出当$|x|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}$时，$P(x,y)$是完美点，进而分别判断①，②；

(2) 依题意，$n=m^2$，根据P为完美点，得出$|m|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2+n^2}$，解不等式，即可求解.

（3）依题意，当$|x_0| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$时，半径为$l$的$\odot A$上有完美点，则当$|x_0| > \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$时，半径为$l$的$\odot A$上无完美点，依题意$y_0 = x_0 + 2$，解不等式，即可求解.

【小问1详解】

解：依题意，$\triangle PMN$是等腰直角三角形，

$\therefore PM = \frac{\sqrt{2}}{2}PN = \frac{\sqrt{2}}{2}OP$，

则M在半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}OP$的$\odot P$上，

设$P(x,y)$，则$OP=\sqrt{x^2+y^2}$，根据直线与圆的位置关系，可得，

当$|x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}$时，$P(x,y)$是完美点，

$\because$① $A(3,1)$；② $B(2,2)$

$\therefore OA=\sqrt{10}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{10}=\sqrt{5}$

而$x_A = 3 > \sqrt{5}$，则A不是完美点

$\because OB = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}OB = 2$

$x_B = 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}BO$

$\therefore$点B是完美点；

故答案为：②

【小问2详解】

解：$\because P(m,n)$为抛物线$y=x^2$上一点

$\therefore n = m^2$

$\because P$为完美点，

$\therefore |m| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2+n^2}$

即$|m| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2+m^4}$

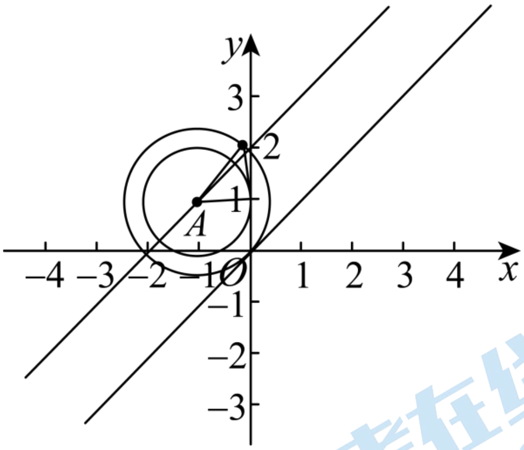
即$m^2 \le \frac{1}{2}(m^2+m^4)$

解得: $m^2 \le 1$

$\therefore m \le -1$或$m \ge 1$；

【小问 3 详解】

解：如图所示，当 $A(x_0,y_0)$ 为圆心，半径为 l 的 $\odot A$ 上有唯一完美点，



依题意，当 $|x_0|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}$ 时，半径为 l 的 $\odot A$ 上有完美点，

$\therefore$ 当 $|x_0|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}$ 时，半径为 l 的 $\odot A$ 上无完美点

$\because A(x_0,y_0)$ 在 $y=x+2$，

$\therefore y_0=x_0+2$，

$\therefore |x_0|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x_0^2+(x_0+2)^2}$，

$\therefore x_0^2>\dfrac{1}{2}\left[x_0^2+(x_0+2)^2\right]$，

解得：$x_0<-1$．

【点睛】本题考查了几何新定义，勾股定理，二次函数的性质，一次函数的性质，解不等式, 直线与圆的位置关系，理解新定义是解题的关键．

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！